CALCOLO DIFFERENZIALE

DEFINIZIONE DI DERIVATA

- SIGNIFICATO GEOMETRICO
  - Cerchiamo la retta che approssima meglio $f: E \to \mathbb{R}$ vicino a $x_0 \in E$ pt di accumulazione
  - La derivata di f in x_0 (se esiste) è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ di equazione $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- DEFINIZIONE VIA LIMITE
  - $f'(x_0)=\lim_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ è la DERIVATA DI f IN x_0
  - Se questo limite esiste f si dice derivabile in x_0
  - Tramite il limite destro e sinistro si definisce la derivata destra e sinistra
    - f è derivabile in $x_0 \iff$ derivata destra e sinistra esistono e coincidono in x_0
- DERIVATE SUCCESSIVE
  - $\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = f^{(n)}$

    Derivata n^a di f

PROPRIETÀ

- CONTINUITÀ
  - f derivabile in $x_0 \Rightarrow$ f continua in x_0
  - Non è vero il viceversa
    - Esempi:
      - $f(x)=|x|$ non è derivabile in $x=0$
      - $f(x)=\{x^a\ x\geq 0,\ (-x)^a\ x<0\}$ non è derivabile in $x=0$
      - Si vede con il limite
- ALGEBRICHE
  - f pari $\Rightarrow$ f' dispari
  - f dispari $\Rightarrow$ f' pari
  - $(c \cdot f)'(x)=c \cdot f'(x)$ con $c \in \mathbb{R}$
  - $(g \pm f)'=f' \pm g'$
  - $(g \cdot f)'=f' \cdot g+f \cdot g'$
  - $(1/f)'=-f'/f^2$
  - $(f/g)'=(f' \cdot g-f \cdot g')/g^2$
- COMPOSIZIONE
  - $(f \circ g)'(x_0)=f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$
- INVERSA
  - f invertibile in un intorno di x_0 e derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ è derivabile in $f(x_0)$ e si ha $(f^{-1})'(f(x_0))=1/f'(x_0)$

DERIVATE DI F. ELEMENTARI

- $(c)'=0\ \forall c \in \mathbb{R}$
- $(x^n)'=n \cdot x^{n-1}$
- $(\sin(x))'=\cos(x)$ — $(\arcsin(x))'=1/\sqrt{1-x^2}$
- $(\cos(x))'=-\sin(x)$ — $(\arccos(x))'=-1/\sqrt{1-x^2}$
- $(\tan(x))'=1/\cos^2(x)$ — $(\arctan(x))'=1/(1+x^2)$
- $(e^x)'=e^x$
- $(\log(x))'=1/x$
- $(a^x)'=(\log(a)) \cdot a^x$
- $(x^x)'=x^x \cdot (\log(x)+1)$

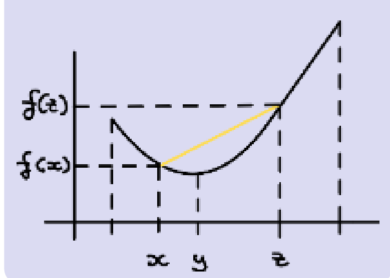
TEOREMI

- CRITERIO DI FERMAT
  - $f:A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ punto interno, x_0 pt di max o min relativo per f su A, f derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$
- TEOREMA DI ROLLE
  - $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$, f derivabile su (a,b), $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi)=0$
- TEOREMA DI DARBOUX
  - $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f continua e derivabile su $[a,b]$, $f'(a)<0$ e $f'(b)>0 \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : f'(\xi)=0$
- TEOREMA DI LAGRANGE
  - $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$, f derivabile su $(a,b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b): f'(\xi)=(f(b)-f(a))/(b-a)$
- TEOREMA DI CAUCHY
  - $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$, continue su $[a,b]$, derivabili su $(a,b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ tale che $[f(b)-f(a)] \cdot g'(\xi)=[g(b)-g(a)] \cdot f'(\xi)$
  - Se $g'(\xi) \neq 0 \Rightarrow [f(b)-f(a)]/[g(b)-g(a)]=f'(\xi)/g'(\xi)$

FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE

- COVESSITÀ
  - $f:I \to \mathbb{R}$, I intervallo, è convessa se $\forall x<y<z$ si ha:

    $f(y) \leq f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$
    - Graficamente:

  - La disuguaglianza si può scrivere anche come $y=\lambda x+(1-\lambda)z$, che chiamiamo combinazione convessa si x e z, con $\lambda \in [0,1]$
- CONCAVITÀ
  - f è concava se −f è convessa
- ESEMPI
  - x^n per n pari, $|x|$, x sono convesse
  - x^n con $n\geq 3$ dispari non è convessa (né concava)
- TEOREMI
  - $f:I \to \mathbb{R}$ derivabile $\Rightarrow$ f convessa $\iff$ f' crescente
  - $f:I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte, f convessa $\iff f''(x)\geq 0\ \forall x \in I$
  - $f:I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in x_0, f convessa $\Rightarrow f''(x_0)\geq 0$
    - Lo stesso vale per f concava con ≤ 0 anziché ≥ 0
  - Il segno di f'' definisce gli intervalli di convessità e concavità di f
  - $f:I \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto, f convessa $\Rightarrow$
    - ① f continua in I
    - ② $\forall x \in J$ esistono le derivate sx e dx e la sx è $\leq$ della dx
    - ③ $x\leq y \Rightarrow df(x)\leq df(y)$
    - ④ Le discontinuità della derivata di f sono un insieme numerabile di punti angolosi e f è derivabile $\forall x \notin \mathrm{disc}(df)$
- PUNTI DI FLESSO
  - Se f è derivabile in x_0 e cambia concavità in x_0, cioè f è convessa in $(x_0-\varepsilon,x_0)$ e concava in $(x_0,x_0+\varepsilon)$ o viceversa, allora x_0 si dice un punto di flesso per f
  - In particolare se f è continua in x_0, cambia concavità in x_0 e $\lim_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0) \to \pm\infty$ allora x_0 è un punto di flesso a tangente verticale

MASSIMI E MINIMI

- $f:A \to \mathbb{R}$, A aperto $x_0 \in A$, f derivabile due volte in x_0, allora:
  - ① $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ è un minimo locale stretto
  - ② $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ è un massimo locale stretto
  - ③ x_0 è un minimo locale $\Rightarrow f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)\geq 0$
  - ④ x_0 è un massimo locale $\Rightarrow f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)\leq 0$
- $f:A \to \mathbb{R}$, A intorno di x_0, f derivabile n volte in x_0, $n \in \mathbb{N}$, $n>1$, $f^k(x_0)=0$ con $1\leq k<n$ e $f^n(x_0)\neq 0$, allora:
  - ① n pari e $f^n(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ è un minimo locale stretto
  - ② n pari e $f^n(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ è un massimo locale stretto
  - ③ n dispari e $f^n(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ non è né di massimo né di minimo ma f è str. crescente in un intorno di x_0
  - ④ n dispari e $f^n(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ non è né di massimo né di minimo ma f è str. decrescente in un intorno di x_0
  - Si dimostra con il polinomio di Taylor